

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ ПО  
КОНКУРСНОЙ ГРУППЕ «ЛФИ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА» ДЛЯ  
ПОСТУПАЮЩИХ В АСПИРАНТУРУ**

На вступительном испытании будут заданы вопросы по выпускной квалификационной работе и вопросы из раздела, соответствующего направлению будущей научно-исследовательской деятельности поступающего. Вопросы по выпускной квалификационной работе (магистратура или специалитет):

1. Основные положения.
2. Новизна.
3. Актуальность.

**Теория вероятностей и математическая статистика**

1. Точечное оценивание. Методы: моментов, максимального правдоподобия, выборочных квантилей.
2. Интервальное оценивание. Точные и асимптотические доверительные интервалы. Методы: центральной функции, построения асимптотического доверительного интервала.
3. Проверка гипотез. Статистика критерия и критическое. Результаты тестирования гипотез, статистическая значимость. Ошибки I и II рода. Уровень значимости, мощность критерия. P-value и его интерпретация.
4. Множественная проверка гипотез. FWER и FDR. Основные методы, их особенности. Метод Бонферрони. Корректировка p-value. Результат при множественной проверке одной и той же гипотезы.
5. Критерии согласия. Критерии:): Колмогорова, хи-квадрат, проверки нормальности.
6. Корреляционный анализ. Смысл и постановка задачи для непрерывного и дискретного случаев. Коэффициенты корреляции, их особенности. Таблицы сопряжённости. Основные критерии проверки взаимосвязанности, примеры.
7. Дисперсионный анализ. Независимые и связанные выборки. Основные критерии, условия их применимости. Примеры.
8. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов. Свойства МНК-оценки, гауссовская линейная модель. Интерпретация OLS Regression Results в statsmodels.
9. Регуляризация. Мотивация. Ridge, Lasso, Elastic Net. Поведение коэффициентов регрессии в зависимости от параметра регуляризации.
10. Решающие деревья. Процедура построения дерева, критерии информативности, ответ в листе. Bias–variance разложение. Случайный лес, достоинства и недостатки.

11. Решающие деревья. Процедура построения дерева, критерии информативности, ответ в листе. Градиентный бустинг, достоинства и недостатки.
12. Нейронные сети: механизм обратного распространения ошибки, оптимизация сети. Полносвязные нейронные сети. Функции активации.
13. Нейронные сети: механизм обратного распространения ошибки, оптимизация сети. Свёрточные нейронные сети: мотивация, типы слоев.
14. Метрики качества. Матрица ошибок. Метрики качества классификации, их особенности. Кривые ROC и PR. Метрики качества регрессии. Кросс-валидация.

## Литература

1. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 1. Основные понятия теории вероятности и статистики. - М., МЦНМО, 2018. – 519 с.
2. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов. Часть 1, 2. - М., МЦНМО, 2021. – 396 с.
3. Прохоров Ю. В., Прохоров А. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. - М., МЦНМО, 2019. – 224 с.
4. Ширяев А.Н. Вероятность-1. - М., МЦНМО, 2021
5. Ширяев А.Н. Вероятность-2. - М., МЦНМО, 2021
6. Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей. - М., МЦНМО, 2019.
7. Ширяев А. Н., Эрлих И. Г., Яськов П. А. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). – электронное издание
8. Кораллов Л. Б., Синай Я. Г. Я. Г. Теория вероятностей и случайные процессы. - М., МЦНМО, 2013
9. Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. - М., МЦНМО, 2012
10. Вероятность: в 2 т. : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2004 .— Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. - 2004. - 520 с.
11. Ширяев А.Н. Вероятность: в 2 т. : учебник для вузов / 4-е перераб. и доп. — М. : МЦНМО, 2007, 2011 .— Т. 2 : Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартингалы, марковские цепи. - 2007, 2011. - 416 с.
12. Теория вероятностей : учебник / Е.С. Вентцель. - 12-е изд., стер. - Москва: ЮСТИЦИЯ, 2018. - 658 с.
13. Крамер Г. Математические методы статистики. - М. Мир. 1975.
14. Wasserman L. All of Statistics – Pittsburgh: Springer Science+Business Media, 2006. – 271 с.
15. Millar R.B. Maximum Likelihood Estimation and Inference - John Wiley & Sons, Ltd, 2011 – 366 с.
16. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. - М.: Физматлит, 2006.— 816 с.
17. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Физматлит, 2007. - 703 с.
18. Girden E.R. - ANOVA: Repeated Measures - Sage Publications, 1992. - 84 с.
19. Tabachnick B. G., Fidell L. S. Experimental designs using ANOVA. – Cengage Learning, 2006. - 250 с.
20. Morgan S. L., Winship C. Counterfactuals and causal inference. - Cambridge University Press, 2014. – 334 p.
21. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. Elements of Statistical Learning – Springer,

2017. - 764
22. Patterson J., Gibson A., Deep Learning: A Practitioner's Approach – O'Reilly Media, 2017. – 971 – p.
  23. R. E. Schapire, Y. Freund, P. L. Bartlett, and W. S. Lee. Boosting the margin: A new explanation for the effectiveness of voting methods. *Annals of Statistics*, 26(5):1651-1686, October 1998.
  24. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E., ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural. - University of Toronto Canada, 2012. – 30 p.

### Дополнительная литература

1. Линейная алгебра: учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984. — 295 с.
2. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие для вузов.— М. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. — 272 с.
3. Э. Мендельсон Введение в математическую логику. - М.: Наука, 1971.  
Сэбер Дж. Линейный регрессионный анализ. - М.: Мир, 1980.
4. Вальд А. Последовательный анализ. - М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960
5. Вероятность: в 2 т. : учебник для вузов / А. Н. Ширяев. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2004. — Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. - 2004. - 520 с.
6. Курс теории вероятностей: учеб. пособ. для вузов / В. П. Чистяков. — 4-е изд., испр. — М. : Агар, 1996. — 256 с.
7. Karpathy A. The Unreasonable Effectiveness of Recurrent Neural Networks. - [https://web.stanford.edu/class/cs379c/archive/2018/class\\_messages\\_listing/content/Artificial\\_Neural\\_Network\\_Technology\\_Tutorials/KarparthyUNREASONABLY-EFFECTIVE-RNN-15.pdf](https://web.stanford.edu/class/cs379c/archive/2018/class_messages_listing/content/Artificial_Neural_Network_Technology_Tutorials/KarparthyUNREASONABLY-EFFECTIVE-RNN-15.pdf)
8. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. - O'Reilly Media, 2019. – 1065.
9. Mason L., Baxter J., Bartlett P., Frean M. Boosting algorithms as gradient descent. - [NIPS Conference, Denver, Colorado, USA, November 29 - December 4, 1999
10. R.M. Bell and Y. Koren. Lessons from the netflix prize challenge. *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 9(2):75–79, 2007.
11. Klaus Greff, Rupesh K. Srivastava, Jan Koutník, Bas R. Steunebrink, Jürgen Schmidhuber LSTM: A Search Space Odyssey.: *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 28(10) DOI:10.1109/TNNLS.2016.2582924
12. Géron A.. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. - O'Reilly Media, 2019. – 856 p.
13. Bishop C.M. *Pattern Recognition and Machine Learning* – Springer Science+Business Media, LLC, 2006/ - 738 p.
14. Weber Н., *Big Data and Artificial Intelligence*. - Independently published – 159 p.
15. Савельев В. *Статистика и котики* – М.: Издательство АСТ, 2018. – 122 с.
16. Айзек М.П. *Графика, формулы, анализ данных в Excel. Пошаговые примеры / М.П. Айзек.* — СПб.: Наука и техника, 2019. — 384 с.
17. Геворкян, П.С. *Теория вероятностей и математическая статистика / П.С. Геворкян.* - М.: Физматлит, 2016. - 176 с.
18. Геворкян, П.С. *Теория вероятностей и математическая статистика / П.С. Геворкян, А.В. Потемкин, И.М. Эйсымонт.* - М.: Физматлит, 2016. - 176 с.
19. Виленкин Н.Я. *Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин.* - М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. - 400 с.
20. Львовский, Е. Н. *Статистические методы построения эмпирических формул.*

Учебное пособие / Е.Н. Львовский. - М.: Высшая школа, 2015. - 240 с.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, ДИНАМИКА МАШИН

1. Аксиомы классической механики (законы Ньютона). Преобразования Галилея. Понятие об инвариантности и ковариантности уравнений механики.
2. Кинематика точки. Проекция скорости и ускорения точки на оси сопровождающего трехгранника.
3. Криволинейные координаты точки. Разложение скорости и ускорения в локальном базисе криволинейной системы координат. Второй закон Ньютона в общековариантной форме (уравнения Лагранжа для свободной материальной точки).
4. Способы задания ориентации твердого тела: углы Эйлера. Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в углах Эйлера.
5. Теорема Эйлера о конечном повороте твердого тела.
6. Алгебра кватернионов.
7. Кватернионный способ задания ориентации твердого тела (присоединенное отображение). Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в кватернионах (уравнения Пуассона) в проекциях на неподвижные и подвижные оси.
8. Формулы сложения поворотов твердого тела в кватернионах. Параметры Родрига-Гамильтона.
9. Угловая скорость твердого тела. Формула Эйлера для распределения скоростей в твердом теле. Формула Ривальса для распределения ускорений в твердом теле.
10. Кинематика сложного движения. Законы сложения скоростей и ускорений точек в сложном движении. Формула Кориолиса.
11. Формулы для угловой скорости и углового ускорения тела в сложном движении.
12. Теоремы об изменении импульса и момента импульса системы материальных точек в инерциальном базисе.
13. Кинетическая энергия системы материальных точек. Теорема Кёнига.
14. Работа и мощность силы. Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек в инерциальном базисе.
15. Силы инерции. Применение основных теорем и законов механики в неинерциальных системах отсчета. Вид основных теорем динамики в кениговых системах отсчета.
16. Потенциальное поле. Теорема об изменении полной энергии. Закон сохранения энергии для консервативных систем.
17. Движение материальной точки в центральном поле. Законы сохранения. Уравнение Бине. Уравнение конических сечений.
18. Задача двух тел. Законы Кеплера.
19. Теоремы об изменении импульса и момента импульса для системы переменного состава.
20. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.
21. Геометрия масс твердого тела: тензор инерции и эллипсоид инерции, главные оси инерции, теорема Гюйгенса-Штейнера для тензора инерции.
22. Формулы для кинетической энергии и кинетического момента твердого тела.
23. Динамические уравнения Эйлера твердого тела с неподвижной точкой.
24. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера). Первые интегралы уравнений движения. Геометрическая интерпретация Пуансо.

25. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Параметры свободной регулярной прецессии.
26. Момент, поддерживающий вынужденную регулярную прецессию динамически симметричного тела с неподвижной точкой.
27. Случай Лагранжа. Первые интегралы уравнений движения.
28. Механические связи и их классификация. Число степеней свободы системы. Возможные и виртуальные перемещения.
29. Общее уравнение динамики для системы материальных точек с идеальными связями.
30. Вывод уравнений Лагранжа для системы материальных точек с голономными связями.
31. Подсчет обобщенных сил. Случай потенциальных и обобщенно потенциальных сил.
32. Свойства уравнений Лагранжа: структура кинетической энергии, разрешимость уравнений Лагранжа относительно старших производных.
33. Первые интегралы уравнений Лагранжа: циклические, Пенлеве-Якоби. Уравнения Лагранжа в неинерциальных системах отсчёта.
34. Положения равновесия. Принцип виртуальных перемещений. Условия равновесия голономной системы в терминах обобщенных сил. Случай потенциальных сил.
35. Устойчивость. Прямой метод Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости равновесия стационарной системы.
36. Теорема Четаева о неустойчивости равновесия стационарной системы.
37. Теорема Барбашина–Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости равновесия стационарной системы (без доказательства).
38. Теорема Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной системы. 1-я теорема Ляпунова о неустойчивости равновесия консервативной системы.
39. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.
40. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению положения равновесия стационарных систем (без доказательства).
41. Критерий Рауса–Гурвица асимптотической устойчивости линейных стационарных систем (без доказательства).
42. Малые колебания консервативной системы в окрестности устойчивого положения равновесия.
43. Главные (нормальные) координаты консервативной системы.
44. Вынужденные колебания линейных стационарных систем под действием гармонической вынуждающей силы. Частотные характеристики.
45. Канонические уравнения Гамильтона. Переход от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона при помощи преобразования Лежандра. Физический смысл функции Гамильтона в случае консервативной системы.
46. Первые интегралы уравнений движения гамильтоновых систем. Циклические первые интегралы и интеграл Якоби.
47. Скобки Пуассона и их свойства. Критерий первого интеграла. Теорема Якоби–Пуассона.
48. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат.
49. Понижение порядка уравнений Гамильтона для обобщенно консервативных систем. Уравнения Уиттекера.
50. Действие по Гамильтону. Вариационный принцип Гамильтона.
51. Ковариантность уравнений Лагранжа по отношению к преобразованиям координат и времени
52. Теорема Эмми Нетер.

53. Канонические преобразования гамильтоновых систем. Локальный критерий каноничности.
54. Критерий каноничности преобразований в терминах производящих функций.
55. Фазовый поток гамильтоновых систем как семейство унивалентных канонических преобразований.
56. Свободные канонические преобразования. Задание свободных канонических преобразований с помощью производящих функций.
57. Преобразование функции Гамильтона при канонических преобразованиях.
58. Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Теорема Якоби.
59. Случаи разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби.
60. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре–Картана гамильтоновых систем.
61. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Ли Хуа-чжуна об универсальных интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем (без доказательства).
62. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема гамильтоновой системы.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Амелькин Н. И. Курс аналитической механики: учебное пособие, 2023, МФТИ – 298 с.
2. Корнев Г. В. Классическая механика в тензорном изложении, 2020, МФТИ – 324 с.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика, 2024, Институт компьютерных исследований, - 712 с.
4. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики, 2008, Физматлит – 304 с.
5. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике, 2018, МФТИ – 572 с.

## Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

1. Алгебраические структуры. Группы, подгруппы, факторгруппы, нормальные подгруппы, гомоморфизмы. Теорема о гомоморфизме групп. Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы, Теоремы Силова. Коммутант группы. Разрешимые группы. Простые группы. Свободные абелевы группы. Подгруппы свободной абелевой группы конечного ранга. Строение конечно порожденных абелевых групп. Свободная группа. Задание группы образующими и определяющими соотношениями. Кольца, идеалы. Факторкольцо. Поле. Характеристика поля. Кольцо многочленов над полем. Корни многочленов. Кратность корня. Неприводимые многочлены. Факториальность евклидовых колец. Факториальность кольца многочленов над полем. Модули над кольцами. Лемма Гаусса. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Поле разложения многочлена. Алгебраические и трансцендентные расширения. Конечные поля.
- 2 Линейная алгебра.  
Векторные пространства, базисы, размерность. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Линейные операторы и их матрицы. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен оператора. Теорема Гамильтона-Кэли. Билинейные и полуторалинейные формы. Квадратичные и эрмитовы формы. Канонический вид квадратичных и эрмитовых форм.  
Самосопряженные операторы. Ортогональные и унитарные операторы. Тензорная алгебра. Алгебра Грассмана.
3. Алгебраическая геометрия.  
Аффинные и проективные пространства. Аффинные и проективные отображения. Коники и квадратики в аффинном и евклидовом пространстве. Соответствие между коммутативными алгебрами и аффинными многообразиями. Гладкие и особые алгебраические многообразия.
4. Группы и алгебры Ли. Определение группы Ли и алгебры Ли. Построение алгебры Ли по группе Ли. Классические группы Ли. Гомоморфизмы групп Ли.
5. Теория представлений. Характеры представлений конечных групп. Разложимость представлений конечных групп. Присоединённое представление группы Ли. Конечномерные неприводимые представления алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ .
6. Теория категорий и функторов. Определение категории и функтора. Абелевы категории. Точные справа, точные слева и точные функторы между абелевыми категориями. Точность слева функтора  $\text{Hom}$ . Точность справа функтора тензорное произведение.
7. Гомологическая алгебра. Когомологии градуированного комплекса объектов абелевой категории. Квазиизоморфизм градуированных комплексов. Определение производной категории. Определение производного функтора.
8. Теория гомотопий. Фундаментальная группа. Накрытия, накрытия Галуа, универсальное накрытие. Литература А.И. Кострикин Введение в алгебру С.И. Гельфанд, Ю.И. Манин Методы гомологической алгебры  
А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс Курс гомотопической топологии



